Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

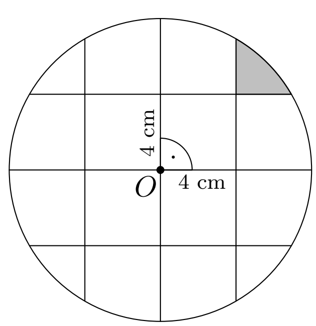
Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. Za 100 učesnika na turniru organizuju se nagradni dueli, po dva duela za svakog učesnika. Pri tome ne postoje dva učesnika iste snage, a u duelu dva učesnika jači uvijek pobijedi slabijeg. Nagrade dobijaju svi učesnici koji pobijede u dva duela. Odrediti najmanji mogući broj nagrađenih.

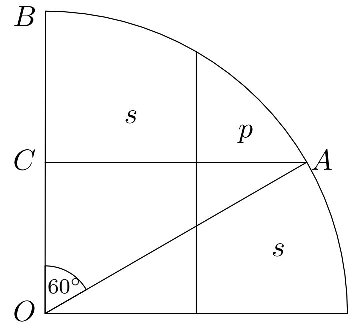
Rješenje: Neka su učesnici označeni brojevima, tako da poredak učesnika od najslabijeg do najjačeg bude predstavljen redom brojevima: $1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100$. Neka u prvom kolu parovi budu: $1 : 2, 3 : 4, \ldots, 99 : 100$. Tako će svi učesnici kojima je dodijeljen paran broj imati po jednu pobjedu, a učesnici koji imaju neparan broj po jedan poraz. Zatim u drugom kolu napravimo sljedeće duele: $100 : 1, 2 : 3, 4 : 5, \ldots, 98 : 99$. Sada će pobjednici biti učesnici sa neparnim brojevima izuzev učesnika sa brojem 1, a učesnici kojima je dodijeljen neparan broj će biti poraženi. Učesnik sa brojem 100 će biti jedini sa dvije pobjede. Pošto će taj učesnik u svakom rasporedu duela imati dvije pobjede, najmanji mogući broj nagrađenih jednak je 1. □

2. Krug poluprečnika 8 cm podijeljen je kao na slici 1 (tačka O je centar kruga). Izračunati površinu osjenčenog dijela kruga.



Slika 1.

Rješenje: Dovoljno je posmatrati jednu četvrtinu kruga. Označimo sa p traženu površinu, a sa s površine kao na slici 2.



Slika 2.

Važi
$$2s + p + 16 = \frac{64\pi}{4} = 16\pi. \tag{1}$$

U pravouglom trouglu $\triangle OAC$ je $|OC| = \frac{|OA|}{2}$, pa je $\measuredangle AOC = 60^\circ$. Slijedi da je kružni isječak OAB šestina kruga, pa je
$$s + p + \frac{8^2\sqrt{3}}{8} = \frac{64\pi}{6} = \frac{32\pi}{3}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi da je
$$p = 16\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)\ \mathrm{cm}^2.$$

□

3. Koliko ima trojki različitih dvocifrenih brojeva a, b i c takvih da je broj b djeljiv brojem a i da važi jednakost $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$?

Rješenje: Iz uslova zadatka slijedi da postoji prirodan broj k takav da je $b = k \cdot a$. Jednakost $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ možemo zapisati kao $c = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{(a \cdot k)^2}{a} = a \cdot k^2$. Dakle, tražimo trojke brojeva oblika a, $a \cdot k$ i $a \cdot k^2$ gdje je $k > 1$ (jer su a, b i c različiti brojevi). Kako trojku čine dvocifreni brojevi, to važe nejednakosti $a \geq 10$, a $a \cdot k^2 \leq 99$. Iz ove dvije nejednakosti dobijamo $k^2 \leq \dfrac{99}{a} \leq \dfrac{99}{10} < 10$, tj. $k \leq 3$. Direktnom provjerom utvrđujemo broj parova (a, k) koji zadovoljavaju gornje nejednakosti:

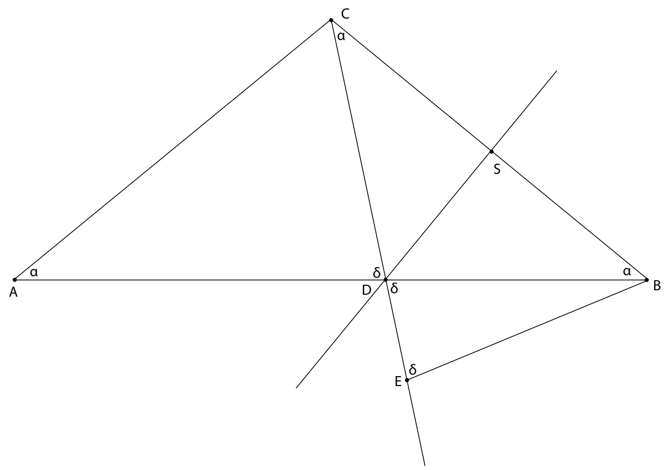
Za $k = 2$ imamo $10 \leq a \leq 99/4 < 25$, tj. 15 parova.

Za $k = 3$ imamo $10 \leq a \leq 99/9 = 11$, tj. 2 para.

Zaključujemo da postoji ukupno $15 + 2 = 17$ traženih trojki. □

4. Neka je D tačka u kojoj simetrala kraka BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ siječe osnovicu AB. Neka je, dalje, Cp poluprava sa početkom u C koja sadrži tačku D. Ako je E tačka na polupravoj Cp takva da je $|AD| = |CE|$, dokazati da je trougao $\triangle BDE$ jednakokraki.

Rješenje: Neka je S središte kraka BC. Simetrala duži BC sadrži tačke S i D, pa je lako provjeriti da su trouglovi $\triangle BDS$ i $\triangle CDS$ podudarni, što znači da je $\measuredangle SCD = \measuredangle SBD$. A kako je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki, važiće i jednakosti $\measuredangle BCD = \measuredangle ABC = \alpha = \measuredangle BAC$.



Slika 3.

Posmatrajmo trouglove $\triangle ADC$ i $\triangle BCE$. Na osnovu prethodnog je $\measuredangle DAC = \measuredangle EAB = \alpha$, po uslovu zadatka je $|AD| = |CE|$, a jednakost $|AC| = |BC|$ važi jer je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki. Zaključujemo da su uočeni trouglovi podudarni, pa važi da je $\measuredangle ADC = \measuredangle BEC$. Međutim, važi i jednakost $\measuredangle ADC = \measuredangle BDE$ jer se radi o unakrsnim uglovima. Iz posljednje dvije jednakosti zaključujemo da je $\measuredangle BDE = \measuredangle BED$, tj. trougao $\triangle BDE$ je jednakokraki, što je i trebalo dokazati.

$\square$