Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VII razred osnovne škole

1. Prvog utorka u mjesecu u 12 sati, Petar je bio i Bijelom Polju, a prvog utorka poslije prvog ponedjeljka tog mjeseca u 12 sati u Ulcinju. Sljedećeg mjeseca, Petar je prvog utorka u mjesecu u 12 sati bio na Žabljaku, a prvog utorka poslije prvog ponedjeljka u 12 sati u Budvi. Odrediti datume Petrovog boravka u ovim gradovima.

Rješenje: Datumi prvi utorak i prvi utorak poslije prvog ponedjeljka su različiti, pa je dakle mjesec o kojem je riječ počeo utorkom. Slično i sljedeći mjesec počeo je utorkom. To je moguće samo ako mjesec ima tačan broj nedjelja, dakle da ima 28 dana, a to je februar. Petar je u Bijelom polju bio 1. februara, a u Ulcinju 8. februara. Slično, na Žabljaku je bio 1. marta, a u Budvi 8. marta. □

2. Dvije fabrike automobila proizvode dnevno ukupno manje od 18 automobila. Druga fabrika proizvodi dnevno manje od dvostruke dnevne proizvodnje prve fabrike. Kada bi prva fabrika povećala proizvodnju za dva automobila dnevno, a druga smanjila dnevnu proizvodnju za dva, druga bi fabrika proizvodila dnevno više automobila od prve. Koliko automobila dnevno proizvodi prva, a koliko druga fabrika?

Rješenje: Neka je x broj dnevno proizvedenih automobila prve fabrike i y broj dnevno proizvedenih automobila druge fabrike. Iz uslova zadatka imamo tri nejednačine

$$x + y < 18, \tag{1}$$

$$y < 2x, \tag{2}$$

$$x + 2 < y - 2. \tag{3}$$

Sabiranjem prve i treće nejednačine dobijamo

$$2x + y + 2 < y - 2 + 18,$$

odakle imamo

$$x < 7.$$

Iz nejednačine (3) imamo $x + 4 < y$, pa na osnovu nejednačine (2) važi

$$x + 4 < y < 2x.$$

Sada jasno dobijamo

$$x + 4 < 2x,$$

tj. $x > 4$.

Na osnovu dobijenih ograničenja za x, moguće su dvije opcije, $x = 5$ ili $x = 6$.
Ako je $x = 5$, iz uslova (2) imamo $y < 10$, a iz uslova (3) imamo $9 < y$, što je nemoguće.
Razmotrimo slučaj $x = 6$.
Tada iz uslova (2) imamo $y < 12$, a iz uslova (3) imamo $y > 10$, pa zaključujemo da je $y = 11$.
Konačno, dnevna proizvodnja prve fabrike je 6 automobila dnevno, a druge 11 automobila dnevno. □

3. Broj $\dfrac{149}{33}$ zapisati kao zbir dva razlomka čiji su i imenilac i brojilac prosti brojevi.

Rješenje: Uočimo da dati broj moramo zapisati kao

$$\frac{149}{33} = \frac{m}{3} + \frac{n}{11},$$

jer su 3 i 11 jedini prosti činioci broja 33. Tražimo pozitivne proste brojeve m i n.
Jasno, odavde slijedi

$$11m + 3n = 149,$$

pa je

$$n = \frac{149 - 11m}{3} = \frac{147 - 12m + 2 + m}{3} = 49 - 4m + \frac{2 + m}{3}.$$

Kako je $n \in \mathbb{Z}$ to $\frac{2+m}{3} \in \mathbb{Z}$, pa je $2 + m = 3k$, tj. $m = 3k - 2,\ k \in \mathbb{Z}$.
Dalje je

$$n = 49 - 4(3k - 2) + k = 57 - 11k,\ k \in \mathbb{Z},$$

odakle imamo uslove za k

$$3k - 2 > 0, \quad 57 - 11k > 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tražimo k za koje važi

$$k > \frac{2}{3} \quad \text{i} \quad k < \frac{57}{11}.$$

Za $k = 1$ imamo $m = 1$ i $n = 46$.
Za $k = 2$ imamo $m = 2$ i $n = 35$.
Za $k = 3$ imamo $m = 7$ i $n = 24$.
Za $k = 4$ imamo $m = 10$ i $n = 13$.
Za $k = 5$ imamo $m = 13$ i $n = 2$, što je rješenje.

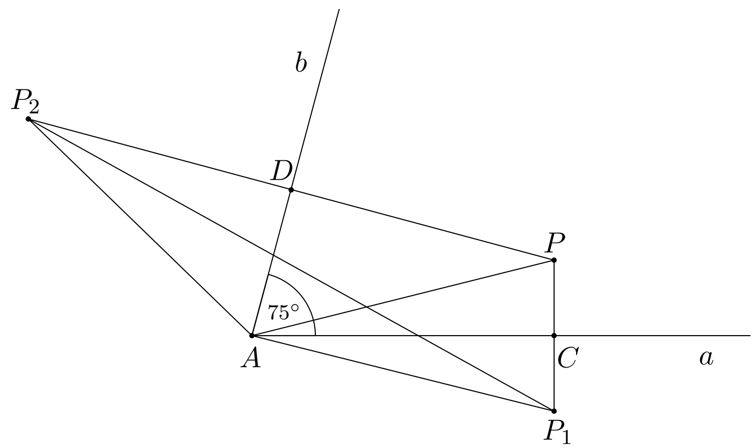
Konačno, $\dfrac{149}{33} = \dfrac{13}{3} + \dfrac{2}{11}$. □

4. Konstruisati ugao od 75° sa tjemenom u tački A. Odabrati neku tačku P koja leži unutar tog ugla, ali ne na simetrali ugla. Nacrtati tačku P_1 koja je osnosimetrična tački P u odnosu na jedan krak i tačku P_2 koja je osnosimetrična tački P u odnosu na drugi krak tog ugla.

(a) Dokazati da je trougao $\triangle P_1AP_2$ jednakokraki.

(b) Odrediti unutrašnje uglove trougla $\triangle P_1AP_2$.

Rješenje:



Slika 1.

Neka su Aa i Ab kraci ugla od $75°$.

(a) Zbog simetrije u odnosu na krak Aa važi $|AP| = |AP_1|$, a zbog simetrije u odnosu na krak Ab je $|AP| = |AP_2|$, iz čega slijedi da je $|AP_1| = |AP_2|$, pa je $\triangle P_1AP_2$ jednakokraki.

(b) Označimo sa C tačku presjeka kraka Aa i prave PP_1, a sa D tačku presjeka kraka Ab i prave PP_2. Zbog simetrije je $\angle CAP = \angle CAP_1$ i $\angle DAP = \angle DAP_2$. Zato je

$$\angle P_1AP_2 = 2\angle CAP + 2\angle PAD = 2\angle CAD = 150°.$$

Kako je $\triangle P_1AP_2$ jednakokraki, to je $\angle AP_1P_2 = \angle AP_2P_1 = 15°$.

□