Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za VIII razred osnovne škole

1. Dokazati da je broj $2^{62}+1$ djeljiv brojem $2^{31}+2^{16}+1$.

Rješenje: Dovoljno je uočiti da važi

$$\begin{aligned}2^{62}+1=\left(2^{31}\right)^2+1&=\left(2^{31}\right)^2+2\cdot 2^{31}+1-2\cdot 2^{31}\\&=\left(2^{31}+1\right)^2-\left(2^{16}\right)^2\\&=\left(2^{31}+1+2^{16}\right)\left(2^{31}+1-2^{16}\right).\end{aligned}$$

□

2. Za 100 učesnika na turniru organizuju se nagradni dueli, po dva duela za svakog učesnika. Pri tome ne postoje dva učesnika iste snage, a u duelu dva učesnika jači uvijek pobijedi slabijeg. Nagrade dobijaju svi učesnici koji pobijede u dva duela. Odrediti najmanji mogući broj nagrađenih.

Rješenje: Neka su učesnici označeni brojevima, tako da poredak učesnika od najslabijeg do najjačeg bude predstavljen redom brojevima: $1,2,3,\ldots,98,99,100$. Neka u prvom kolu parovi budu: $1:2, 3:4,\ldots,99:100$. Tako će svi učesnici kojima je dodijeljen paran broj imati po jednu pobjedu, a učesnici koji imaju neparan broj po jedan poraz. Zatim u drugom kolu napravimo sljedeće duele: $100:1, 2:3, 4:5,\ldots,98:99$. Sada će pobjednici biti učesnici sa neparnim brojevima izuzev učesnika sa brojem 1, a učesnici kojima je dodijeljen neparan broj će biti poraženi. Učesnik sa brojem 100 će biti jedini sa dvije pobjede. Pošto će taj učesnik u svakom rasporedu duela imati dvije pobjede, najmanji mogući broj nagrađenih jednak je 1. □

3. Ako je n složen broj veći od 4, dokazati da je broj $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ djeljiv sa n.

Rješenje: Kako je broj n složen možemo razlikovati dva slučaja.

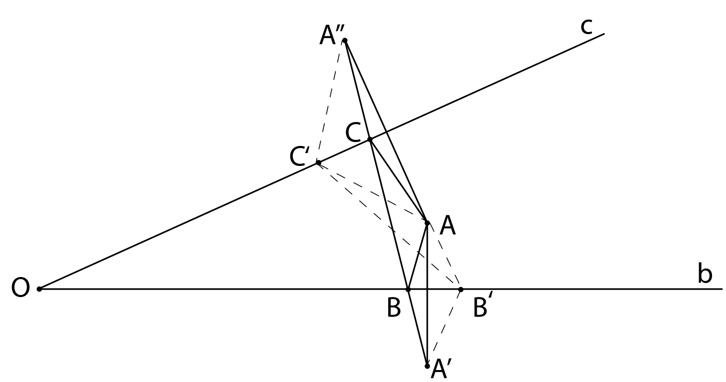
Prvo, ako se n može zapisati kao proizvod dva različita broja $n=a\cdot b$, $a>b>1$ onda očigledno mora biti $a<n$ i $b<n$, pa se oba ova broja pojavljuju kao činioci u proizvodu $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. To znači da je dati proizvod djeljiv sa n.

Ako se n ne može zapisati kao proizvod dva različita broja (veća od 1), to znači da je $n=a^2$ gdje je a neki prost broj. Po uslovu zadatka je $4<n$, pa zaključujemo da je $2<a$. Množeći

ovu jednakost sa a dobijamo da je $2a < a^2 = n$. Dakle, važi nejednakost $a < 2a < n$, pa se brojevi a i $2a$ pojavljuju kao činioci u proizvodu $(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. To znači da je dati proizvod djeljiv brojem $2a^2$, a samim tim i brojem $a^2 = n$. $\square$

4. Neka je dat oštar ugao $\measuredangle bOc$ i neka je A tačka u njegovoj unutrašnjosti. Odrediti tačke B i C na kracima Ob i Oc redom takve da zbir dužina duži $|AB| + |BC| + |AC|$ bude namjanji mogući. Detaljno obrazložiti odgovor.

Rješenje: Neka je A' tačka simetrična tački A u odnosu na polupravu Ob, a A'' tačka simetrična tački A u odnosu na polupravu Oc. Neka su B i C tačke u kojima duž $A'A''$ siječe krake Ob i Oc redom. Primijetimo da, zbog izbora tačaka A' i A'' važi $|AB| = |A'B|$ i $|AC| = |A''C|$, pa je $|AB| + |BC| + |AC| = |A'B| + |BC| + |CA''| = |A'A''|$.



Na sličan način zaključujemo da za bilo koje dvije tačke tačke $B' \in Ob$ i $C' \in Oc$ važi $|AB'|+|B'C'|+|AC'| = |A'B'|+|B'C'|+|C'A''|$. Posljednji zbir predstavlja dužinu poligonalne linije koja spaja tačke A' i A'', pa će uvijek biti $|A'B'| + |B'C'| + |C'A''| \geq |A'A''|$, odnosno $|AB'| + |B'C'| + |AC'| \geq |AB| + |BC| + |AC|$. Posljednja nejednakost dokazuje da su ovako izabrane tačke B i C tražene tačke. $\square$